بسمه تعالی

Model Predictive Control

سعید شمقدری

دانشکده مهندسی برق
دانشگاه علم و صنعت ایران

نیم سال دوم ۹۳–۹۲

Generalized Predictive Control

- Generalized: درنظر گرفتن نویز و اغتشاش در طراحی
  - حل تحلیلی درعدم حضور قید
  - قابلیت استفاده برای فرایندهای NMP و ناپایدار
- AR: $A(z^{-1})y(t) = e(t)$
- MA: $y(t) = C(z^{-1})e(t)$
- ARX: $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + e(t)$
- MAX: $y(t) = B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})e(t)$
- ARMA: $A(z^{-1})y(t) = C(z^{-1})e(t)$
- CARMA, ARMAX:
  $A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$
- CARIMA, ARIMAX:
  $$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + \frac{C(z^{-1})e(t)}{\Delta(z^{-1})}, \Delta = 1 - z^{-1}$$
- Box Jenkins: $y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}e(t)$

- نمایش واحد برای مدل ARMAX و ARIMAX:

- CARMA, ARMAX:
  $$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$
- CARIMA, ARIMAX:
  $$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + \frac{C(z^{-1})e(t)}{\Delta(z^{-1})}$$
  $$\Delta A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})\Delta u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

- $\tilde{A}y(t) = z^{-d}B\tilde{u}(t-1) + Ce(t)$

$$\tilde{u}(t) = \left(\begin{array}{l} u(t): for\ ARMAX \\ \Delta u(t): for\ ARIMAX \end{array}\right. \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{l} A: for\ ARMAX \\ \tilde{A}: for\ ARIMAX \end{array}\right.$$

4.2 Formulation of Generalized Predictive Control

4.2 Formulation of Generalized Predictive Control

- سیستم SISO با نویز e(t) و تاخیر d:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}$$
$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}$$
$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{nc} z^{-nc}$$

4.2 Formulation of Generalized Predictive Control

- مناسب بودن مدل CARIMA برای سیستمهای صنعتی با اغتشاش و نویزهای غیر ایستا :

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}\,u(t - 1) + C(z^{-1})\,\frac{e(t)}{\Delta}$$

نویز سفید: $C = 1$

تابع هزینه:

$$J = E\left\{ \sum_{i=n_1}^{n_2} \left(y_d(t+i) - y_m(t+i) \right)^2 \right\} + \lambda \sum_{j=1}^{n_u} \tilde{u}^2(t+j-1)$$

$$n_1 = d+1 \longrightarrow \begin{cases} d \text{ برای تأخیر} \\ 1 \text{ برای } ZOH \end{cases}$$

$$n_2 = n_1 - 1 + P$$

$$n_u = M$$

نویز سفید : $C(z^{-1}) = 1$

فرایند پیش بینی خروجی:

معادله دیوفانتین برای $\breve{A}$ (برای j مرحله تقسیم):

(رتبهٔ ۱−j) خارج قسمت   باقیمانده   رتبهٔ $\tilde{n}_a + (j-1)$

$$\frac{1}{\tilde{A}} = E_j + \frac{F_j \, z^{-j}}{\tilde{A}}$$

برای اینکه Fj از عدد ثابت شروع شود از z^{-j} فاکتور گیری شده

$$E_j = e_{j,0} + e_{j,1} z^{-1} + \cdots + e_{j,j-1} z^{-j+1}$$

تساوی بزو (Bezout Identity) :

$$1 = E_j \tilde{A} + z^{-j} F_j$$

$$\longrightarrow E_j \tilde{A} = 1 - z^{-j} F_j$$

تخمین خروجی $\hat{y}(t+j)$: (j step ahead Predictor)

$$\tilde{A}\, y(t) = B\, \tilde{u}(t-d-1) + e(t)$$

$$\xrightarrow{\times E_j} E_j \tilde{A}\, y(t) = E_j B\, \tilde{u}(t-d-1) + E_j e$$

$$(E_j \tilde{A} = 1 - z^{-j} F_j)$$

$$\Longrightarrow (1 - z^{-j} F_j)\, y(t) = E_j B \tilde{u}(t-d-1) + E_j e(t)$$

$$(1-z^{-j}F_j)\,y(t) = E_j B\tilde{u}(t-d-1) + E_j e(t)$$

$$\xrightarrow{t \to t+j}$$

$$\underbrace{(1-z^{-j}F_j)\,y(t+j)}_{\hookrightarrow\, y(t+j) - F_j y(t)} = E_j B\tilde{u}(t+j-d-1) + E_j e(t+j)$$

تخمین خروجی $\hat{y}(t+j)$:

$$y(t+j) = F_j y(t) + E_j B\tilde{u}(t+j-d-1) + E_j e(t+j)$$

تخمین خروجی $\hat{y}(t+j)$:

$$y(t+j) = F_j\, y(t) + E_j B\, \tilde{u}(t+j-d-1) + E_j\, e(t+j)$$

توجه : مرتبه Ej از j-1 است:

$E_j\, e(t+j)$ مربوط به آینده است

$$\hat{y}(t+j) = E\{y(t+j)\} = E\{F_j\, y(t) + E_j B\, \tilde{u}(t+j-d-1)\} + E\{\cancel{E_j\, e(t+j)}\}^{0}$$

$$\hat{y}(t+j) = F_j\, y(t) + E_j B\, \tilde{u}(t+j-d-1)$$

مثال: $A = 1 - az^{-1}$

$$\tilde{A} = A\Delta = (1 - az^{-1})(1 - z^{-1})$$

$$= 1 - (1+a)z^{-1} + az^{-2}$$

$$a_0 = 1 \qquad \tilde{a}_1 = -(1+a) \qquad \tilde{a}_2 = a$$

مثال: $\tilde{A}(z^{-1})$ مونیک باشد (ضریب بزرگترین درجه آن ۱ باشد)

$$\frac{1}{\tilde{A}} = ?$$

:j=1

$$1 \;\Big|\; \underline{1+\tilde{a}_1 z^{-1}+\tilde{a}_2 z^{-2}+\cdots}$$

$$\frac{1+\tilde{a}_1 z^{-1}+\tilde{a}_2 z^{-2}+\cdots}{z^{-1}\left(-\tilde{a}_1-\tilde{a}_2 z^{-1}-\cdots\right)} \qquad 1 \longrightarrow E_1$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{F_1}$$

محاسبه باقیمانده در مرحله اول:

$$F_1 = f_{1,0} + f_{1,1} z^{-1} + \cdots$$

$$f_{1,0} = -\tilde{a}_1 \qquad f_{1,1} = -\tilde{a}_2 \,,\; f_{1,2} = -\tilde{a}_3$$

: j=2

$$\frac{1}{1+\tilde{a}_1 z^{-1}+\tilde{a}_2 z^{-2}+\cdots} = \underbrace{1-\tilde{a}_1 z^{-1}}_{E_2}$$

$$1+\tilde{a}_1 z^{-1}+\cdots$$

$$-\tilde{a}_1 z^{-1}-\tilde{a}_2 z^{-2}-\tilde{a}_3 z^{-3}-\cdots$$

$$-\tilde{a}_1 z^{-1}-\tilde{a}_1^2 z^{-2}-\tilde{a}_1\tilde{a}_2 z^{-3}-\cdots$$

$$z^{-2}\underbrace{\left[(\tilde{a}_1^2-\tilde{a}_2)+(\tilde{a}_1\tilde{a}_2-a_3)z^{-1}+\cdots\right]}_{F_2}$$

ارتباط E_j و E_{j+1} :

$$E_{j+1}=E_j+(\text{عنصر اول باقیمانده قبلی})\,z^{-j}$$

ارتباط E_j و E_{j+1} :

$$E_{j+1} = E_j + \left(\text{عنصر اول باقیمانهٔ قبلی}\right) z^{-j}$$

پس می توان نوشت:

$$E_j = e_{j,0} + e_{j,1} z^{-1} + \cdots + e_{j,j-1} z^{-j+1}$$

$$E_{j+1} = e_{j+1,0} + e_{j+1,1} z^{-1} + \cdots + e_{j+1,j-1} z^{-j+1} + e_{j+1,j} z^{-j}$$

محاسبه E_{j+1} :

$$\begin{cases} e_{j+1,0} = e_{j,0} \\ \vdots \\ e_{j+1,j-1} = e_{j,j-1} \\ e_{j+1,j} = f_{j,0} \end{cases} \Longrightarrow E_{j+1} = E_j + f_{j,0} z^{-j}$$

معادله عمومی برای $f_{j+1,i}$:

$$f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - \tilde{a}_{i+1} f_{j,0}$$

قبلا به دست آمد:

$$y_m(t+j) = E\left[y(t+j)\right] = F_j\, y(t) + E_j B \tilde{u}(t+j-d-1)$$

که در آن:

$$\begin{cases} E_j = e_{j,0} + e_{j,1} z^{-1} + \cdots + e_{j,j-1} z^{-j+1} \\ B = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-n_b} \end{cases}$$

$$E_j B = b_0 e_{j,0} + (b_1 e_{j,0} + b_0 e_{j,1}) z^{-1} + \cdots$$

تعریف:

$$M_j = E_j B$$

$$y_m(t+j) = E[y(t+j)] = F_j\, y(t) + E_j B \tilde{u}(t+j-d-1)$$

$$\begin{cases} E_j = e_{j,0} + e_{j,1} z^{-1} + \cdots + e_{j,j-1} z^{-j+1} \\ B = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-n_b} \end{cases}$$

$$M_j = E_j B$$

$$M_{j+1} = E_{j+1} B = (E_j + f_{j,0} z^{-j}) B = E_j B + f_{j,0} B z^{-j}$$

$$M_{j+1} = M_j + f_{j,0} B z^{-j}$$

محاسبه خروجی در n1 سمپل بعد : $\hat{y}(t+n_1)$

$$y_m(t+n_1) = F_{n_1}\, y(t) + E_{n_1} B \tilde{u}(t+n_1-d-1)$$

فرض : n1=1 , d=0

$$y_m(t+n_1) = F_{n_1}\, y(t) + \underbrace{b_0 e_{n_1,0}\, \tilde{u}(t+n_1-d-1)}_{M^0_{n_1} \tilde{u}(t+n_1-d-1)} + \underbrace{(b_1 e_{n_1,0} + b_0 e_{n_1,1})\tilde{u}(t+n_1-d-2) + \cdots}_{M'_{n_1}}$$

اثر ورودی های فعلی را نتیجه در $y_m(t+n_1)$

اثر ورودی های گذشته در $y_m(t+n_1)$

$$y_m(t+j) = F_j \cdot y(t) + M_j^{\circ}\, \tilde{u}(t+j-d-1) + M_j'\, \tilde{u}(t+j-d-1)$$

که:

$$M_j = M_j^{\circ} + M_j'$$

اثر ورودیهای گذشته و خروجیهای گذشته و فعلی در $y_m(t+j)$:

$$F_j\, y(t) + M_j' \cdot \tilde{u}(t+j-d-1)$$

اثر ورودیهای فعلی و آینده در $y_m(t+j)$:

$$M_j^{\circ}\, \tilde{u}(t+j-d-1)$$

تعریف:

$$Y_m = \begin{bmatrix} y_m(t+n_1) \\ \vdots \\ y_m(t+n_2) \end{bmatrix}$$

$\tilde{u}$: ورودی‌های حال و آینده

داریم:

$$Y_m = f + M^{\circ}\,\tilde{u}$$

free Response

محاسبه f نیاز به محاسبه F_j و E_j دارد

تابع هزینه:

$$J = (Y_d - Y_m)^T (Y_d - Y_m) + \tilde{u}^T R \tilde{u}$$

$$Y_m = f + M^{\circ} \tilde{u}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{u}} = 0 \longrightarrow \tilde{U} = (M^{\circ T} Q M^{\circ} + RI)^{-1} M^{\circ T} E$$

$$E = (Y_d - f)$$

مثال:

مدل ARIMAX

$$(1+a_1 z^{-1})\, y(t) = (b_0 + b_1 z^{-1})\, u(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

$a_1 = -0.8 \quad b_0 = 0.4 \quad b_1 = 0.6 \quad P = M = 3 \quad N_1 = 1$

: d=0

$$\tilde{A} = (1 - 0.8 z^{-1})(1 - z^{-1}) = 1 - 1.8 z^{-1} + 0.8 z^{-2}$$

$$1 \qquad \Big\lfloor\, 1-1.8z^{-1}+0.8z^{-2}$$

$$-1+1.8z^{-1}-0.8z^{-2} \qquad 1+1.8z^{-1}+2.44z^{-2} \qquad E_j$$

$$z^{-1}F_1 \rightarrow +1.8z^{-1}-0.8z^{-2}$$

$$-1.8z^{-1}+3.24z^{-2}-1.44z^{-3}$$

$$z^{-2}F_2 \rightarrow 2.44z^{-2}-1.44z^{-3}$$

$$-2.44z^{-2}+4.392z^{-3}-1.952z^{-4}$$

$$z^{-3}F_3 \rightarrow 2.959z^{-3}-1.952z^{-4}$$

$$\begin{cases} E_1 = 1 & F_1 = 1.8-0.8z^{-1} \\ E_2 = 1+1.8z^{-1} & F_2 = 2.44-1.44z^{-1} \\ E_3 = 1+1.8z^{-1}+2.44z^{-2} & F_3 = 2.952-1.952z^{-1} \end{cases}$$

$$M_j = E_j B$$

$$M_1 = E_1 B = 0.4 + 0.6 z^{-1}$$

$$M_2 = E_2 B = (1 + 1.8 z^{-1})(0.4 + 0.6 z^{-1}) = 0.4 + 1.32 z^{-1} + 1.8 z^{-2}$$

$$M_3 = E_3 B = 0.4 + 1.32 z^{-1} + 2.056 z^{-2} + 1.464 z^{-3}$$

$$y_m(t+1) = F_1 y(t) + M_1 \Delta u(t) = \underbrace{1.8 y(t) - 0.8 y(t-1)}_{f(t+1)} + \overbrace{0.4 \Delta u(t)}^{M_1^0 \tilde{u}(t)}$$

$$+ \underbrace{0.6 \Delta u(t-1)}_{M_1' \tilde{u}(t)}$$

$$y_m(t+2) = F_2\, y(t) + M_2\, \Delta u(t+1)$$

$$= 2.44\, y(t) - 1.44\, y(t-1) + \overbrace{0.4\, \Delta u(t+1) + 1.32\, \Delta u(t)}^{M_2^{\circ}\, \tilde{u}(t)}$$

$$f(t+2) \qquad + \underbrace{1.8\, \Delta u(t-1)}_{M'_2\, \tilde{u}(t)}$$

$$y_m(t+3) = \underbrace{2.952\, y(t) - 1.952\, y(t-1)}_{} + \underbrace{0.4\, \Delta u(t+2) + 1.32\, \Delta u(t+1) + 2.056\, \Delta u(t)}_{M_3^{\circ}\, \tilde{u}(t)}$$

$$f(t+3) \qquad + \underbrace{1.464\, \Delta u(t-1)}_{}$$

$$Y_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.56 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix}}_{M^\circ} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ f(t+3) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u = \left(M^{\circ T} Q M^\circ + R I \right)^{-1} M^{\circ T} \left(Y_d - f \right)$$

فرض : $Y_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ورودی پله و $\alpha = 0$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} 0.133 & 0.256 & 0.147 \\ -0.154 & -0.165 & 0.286 \\ -0.029 & -0.54 & 0.183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_d - f \end{bmatrix}$$

4.2 Formulation of Generalized Predictive Control

- تابع هزینه:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t + j \mid t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t + j - 1)]^2$$

- قبلا تعریف شده:
- $\hat{y}(t + j \mid t)$ is an optimum j step ahead prediction
- N_1 ,N_2 ,N_u, $\delta(j)$,$\lambda(j)$,$w(t + j)$
- هدف: تعیین $u(t)$,$u(t+1)$,... برای اینکه خروجی $y(t+j)$ نزدیک به مرجع $w(t + j)$ باشد
- نیاز به تخمین $y(t + j)$ برای $N_1 \leq j \leq N_2$

4.2 Formulation of Generalized Predictive Control

- Class Notes